МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**(ФГБОУ ВО «ВГУ»)**

**УТВЕРЖДАЮ**
Заведующий кафедрой
уравнений в частных производных
и теории вероятностей

А.В. Глушко
*16.04.24*

# РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

## Б1.В.05 Начально-краевые задачи для параболических уравнений

**1. Код и наименование направления подготовки: 01.04.01 Математика**

**2. Магистерская программа: Математические модели гидродинамики**

**3. Квалификация выпускника: Магистр**

**4. Форма обучения: Очная**

**5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета**

**6. Составители программы: Рябенко Александр Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент**

**7. Рекомендована: Научно-методическим советом математического факультета Протокол №0500-03 от 28.03.2024**

**8. Учебный год: 2025/ 2026 Семестр(ы): 3**

**9. Цели и задачи учебной дисциплины**

Цели изучения дисциплины:

- ознакомление слушателей с основными методами исследования краевых и начально-краевых задач для уравнений параболического типа;
- фундаментальная подготовка в области исследования задач математической физики, овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования в разнообразных приложениях.

Задачи учебной дисциплины:
- изучение основных фактов о параболических уравнениях;
- овладение методами, позволяющими осуществлять качественное исследование решений параболических уравнений.

**10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП:**

Блок 1; часть, формируемая участниками образовательных отношений.

Для её успешного освоения необходимы знания и умения, приобретенные в результате обучения по предшествующим (а также параллельно изучаемым) дисциплинам: математический анализ, комплексный анализ, функциональный анализ, алгебра, уравнения с частными производными.

Освоение курса «Начально-краевые задачи для параболических уравнений» необходимо для дальнейшего изучения и исследование различных задач математической физики и задач для уравнений с частными производными. Знание методов исследования качественных свойств решений параболических уравнений может существенно помочь при построении и анализе различных математических моделей, возникающих в физике, химии, биологии, медицине, экономике, а также в технике. Кроме того, методы исследования уравнений параболического типа широко применяются в целом ряде направлений современной математики.

**11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:**

| Код | Название компетенции | Код(ы) | Индикатор(ы) | Планируемые результаты обучения |
|---|---|---|---|---|
| ПК-1 | Способен решать задачи аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач математической гидродинамики | ПК-1.1 | Обладает большим объемом знаний в области математической гидродинамики | Знать: как применять большой объемом знаний в области математической гидродинамики.<br><br>Уметь: применять большой объемом знаний в области математической гидродинамики..<br><br>Владеть: методами, позволяющими применять большой объемом знаний в области математической гидродинамики.. |
| | | ПК-1.2 | Умеет находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в области математической гидродинамики. | Знать: как находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в области математической гидродинамики.<br><br>Уметь: находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в области математической гидродинамики.<br><br>Владеть: методами, позволяющими находить, формулировать и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в области математической гидродинамики. |
| | | ПК-1.3 | Имеет | Знать: как формировать практический опыт |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | практический опыт научно-исследовательской деятельности в области математической гидродинамики. | научно-исследовательской деятельности в области математической гидродинамики.<br><br>Уметь: формировать практический опыт научно-исследовательской деятельности в области математической гидродинамики..<br><br>Владеть: методами, позволяющими формировать практический опыт научно-исследовательской деятельности в области математической гидродинамики. |
| ПКВ-3 | Способен осуществлять теоретическое обобщение научных данных и результатов экспериментов в моделях математической гидродинамики | ПКВ-3.1 | Обладает теоретическим аппаратом, необходимым для обобщения научных данных и результатов экспериментов в моделях математической гидродинамики | Знать: теоретический аппарат, необходимый для обобщения научных данных и результатов экспериментов в моделях математической гидродинамики.<br><br>Уметь: находить теоретический аппарат, необходимый для обобщения научных данных и результатов экспериментов в моделях математической гидродинамики.<br><br>Владеть: методами, позволяющими находить теоретический аппарат, необходимый для обобщения научных данных и результатов экспериментов в моделях математической гидродинамики. |
| | | ПКВ-3.2 | Умеет структурировать и обобщать научные и экспериментальные данные, четко формулировать и излагать необходимую информацию. | Знать: как структурировать и обобщать научные и экспериментальные данные, четко формулировать и излагать необходимую информацию.<br><br>Уметь: структурировать и обобщать научные и экспериментальные данные, четко формулировать и излагать необходимую информацию.<br><br>Владеть: методами, позволяющими структурировать и обобщать научные и экспериментальные данные, четко формулировать и излагать необходимую информацию. |
| | | ПКВ-3.3 | Имеет практический опыт обобщения подобной информации | Знать: как получить практический опыт обобщения подобной информации.<br><br>Уметь: получить практический опыт обобщения подобной информации.<br><br>Владеть: методами, позволяющими получить практический опыт обобщения подобной информации. |

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.— 4 / 144.**

**Форма промежуточной аттестации: Экзамен – 3 семестр**

**13. Трудоемкость по видам учебной работы**

| Вид учебной работы | | Трудоемкость | |
|---|---|---|---|
| | | Всего | По семестрам |
| | | | 3 семестр |
| Контактная работа | | 44 | 44 |
| в том числе: | лекции | 22 | 22 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | практические | 22 | 22 |
| | лабораторные | | |
| | курсовая работа | | |
| | контрольные работы | 2 | 2 |
| Самостоятельная работа | | 64 | 64 |
| Промежуточная аттестация | | Экзамен – 36 | Экзамен – 36 |
| Итого: | | 144 | 144 |

### 13.1. Содержание дисциплины

| п/п | Наименование раздела дисциплины | Содержание раздела дисциплины | Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК * |
|---|---|---|---|
| | | **1. Лекции** | |
| 1.1 | Формулы Грина. Фундаментальное решение | Оператор теплопроводности.<br>Оператор сопряженный к оператору теплопроводности.<br>Первая формула Грина.<br>Фундаментальное решение и его интерпретация.<br>Свойства фундаментального решения | -<br>https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=18054<br>-<br>- |
| 1.2 | Постановка краевых задач и задачи Коши. Принцип максимума в ограниченной области | Первая краевая задача.<br>Вторая краевая задача.<br>Третья краевая задача.<br>Задача Коши.<br>Принцип максимума в ограниченной области. | |
| 1.3 | Априорные оценки решений краевых задач. Теоремы единственности. | Оценка решения первой краевой задачи.<br>Оценка решения второй краевой задачи.<br>Единственность решения первой краевой задачи.<br>Единственность решения второй краевой задачи | |
| 1.4 | Аналитичность решений по пространственной переменной | Аналитичность решений по пространственной переменной.<br>Оценка аналитического продолжения. | |
| 1.5 | Теоремы об устранимой особенности | Первая теорема об устранимой особенности.<br>Вторая теорема об устранимой особенности. | |
| 1.6 | Построение решения задачи Коши при помощи преобразования Фурье | Формальное построение решения задачи Коши.<br>Теорема существования. | |
| 1.7 | Гипоэллиптичность оператора теплопроводности | Теорема о гипоэллиптичности.<br>Теорема о единственности обобщенного решения. | |
| | | **2. Практические занятия** | |
| 2.1 | Представление решений с помощью потенциалов. Бесконечная дифференцируемость решений | Объемный тепловой потенциал.<br>Тепловой потенциал простого слоя.<br>Тепловой потенциал двойного слоя.<br>Теорема о бесконечной дифференцируемости решений. | -<br>https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=18054<br><br>- |
| 2.2 | Принцип максимума в неограниченной области. Строгий принцип максимума | Лемма об оценках решения сверху и снизу.<br>Принцип максимума в неограниченной области<br>Строгий принцип максимума | |
| 2.3 | Оценки решений неоднородных уравнений | Оценка решений неоднородного уравнения в ограниченной области.<br>Оценка решений неоднородных уравнений в неограниченных областях. | |
| 2.4 | Априорные оценки решений задачи Коши. Теорема единственности для задачи Коши. Стабилизация решений | Оценка решения задачи Коши.<br>Единственность решения задачи Коши.<br>Стабилизация решения для ограниченной области.<br>Стабилизация решения для неограниченной области. | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2.5 | Оценки производных решений уравнения теплопроводности | Оценка производных первого порядка по пространственным переменным.<br>Оценка производных по пространственным переменным.<br>Оценка смешанных производных (по переменной времени и по пространственным переменным) | |
| 2.6 | Теорема Лиувилля | Теорема Лиувилля.<br>Изолированные особенности для уравнения теплопроводности. | |
| 2.7 | Компактность семейства решений | Теорема о сходимости последовательности решений для уравнения теплопроводности.<br>Теорема о компактности. | |
| 2.8 | Гладкость объемных потенциалов. Обобщенное решение для уравнения теплопроводности | Теорема о гладкости объемных потенциалов.<br>Постановка обобщенной задачи для уравнения теплопроводности.<br>Дифференциальные свойства решения обобщенной задачи.<br>Контрольная работа | |

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

| № п/п | Наименование темы (раздела) дисциплины | Виды занятий (количество часов) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Лекции | Практические | Лабораторные | Самостоятельная работа | Всего |
| 1.1 | Формулы Грина. Фундаментальное решение | 3 | | | 4 | 7 |
| 1.2 | Постановка краевых задач и задачи Коши. Принцип максимума в ограниченной области | 3 | | | 4 | 7 |
| 1.3 | Априорные оценки решений краевых задач. Теоремы единственности | 3 | | | 4 | 7 |
| 1.4 | Аналитичность решений по пространственной переменной | 3 | | | 4 | 7 |
| 1.5 | Теоремы об устранимой особенности | 3 | | | 4 | 7 |
| 1.6 | Построение решения задачи Коши при помощи преобразования Фурье | 3 | | | 4 | 7 |
| 1.7 | Гипоэллиптичность оператора теплопроводности | 4 | | | 4 | 8 |
| 2.1 | Представление решений с помощью потенциалов. Бесконечная дифференцируемость решений | | 2 | | 4 | 6 |
| 2.2 | Принцип максимума в неограниченной области. Строгий принцип максимума | | 2 | | 4 | 6 |
| 2.3 | Оценки решений неоднородных уравнений | | 3 | | 4 | 7 |
| 2.4 | Априорные оценки | | 3 | | 4 | 7 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | решений задачи Коши. Теорема единственности для задачи Коши. Стабилизация решений | | | | | |
| 2.5 | Оценки производных решений уравнения теплопроводности | | 3 | | 5 | 8 |
| 2.6 | Теорема Лиувилля | | 3 | | 5 | 8 |
| 2.7 | Компактность семейства решений | | 3 | | 5 | 8 |
| 2.8 | Гладкость объемных потенциалов. Обобщенное решение для уравнения теплопроводности | | 3 | | 5 | 8 |
| | Итого: | 22 | 22 | | 64 | 108 |

**14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины:** Преподавание дисциплины заключается в чтении лекций и проведении практических занятий. На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Начально-краевые задачи для параболических уравнений» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения обучающимся рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей лекции.
2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникают вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутствующий час преподавателю.
3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.
4. Выбрать время для работы с литературой по дисциплине в библиотеке.

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям.

Кроме обычного курса в системе «Электронный университет», все необходимые для усвоения курса материалы размещены на кафедральном сайте http//:www.kuchp.ru

Методические указания для обучающихся при самостоятельной работе.

Самостоятельная работа обучающихся направлена на самостоятельное освоение всех тем и вопросов учебной дисциплины, предусмотренных программой. Самостоятельная работа является обязательным видом деятельности для каждого обучающегося, ее объем по учебному курсу определяется учебным планом и составляет 64 часа. При самостоятельной работе обучающийся взаимодействует с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя.

Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и ресурсами сети Internet, статистическими данными является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у обучающихся заинтересованное отношение к конкретной проблеме.

Вопросы, которые вызывают у обучающихся затруднения при подготовке, должны быть заранее сформулированы и озвучены во время занятий в аудитории для дополнительного разъяснения преподавателем.

Виды самостоятельной работы: конспектирование учебной и научной литературы; проработка учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе); работа в электронной библиотечной системе; работа с информационными справочными системами, выполнение домашних заданий (практических и теоретических); выполнение контрольных работ; подготовка к практическим занятиям; работа с вопросами для самопроверки, написание рефератов.

Примерные темы рефератов: Формулы Грина. Фундаментальное решение; Постановка краевых задач и задачи Коши. Принцип максимума в ограниченной области; Априорные оценки решений краевых задач. Теоремы единственности; Аналитичность решений по пространственной переменной; Теоремы об устранимой особенности; Построение решения задачи Коши при помощи преобразования Фурье; Гипоэллиптичность оператора теплопроводности; Представление решений с помощью потенциалов. Бесконечная дифференцируемость решений; Принцип максимума в неограниченной области. Строгий принцип максимума; Оценки решений неоднородных уравнений; Априорные оценки решений задачи Коши. Теорема единственности для задачи Коши. Стабилизация решений; Оценки производных решений уравнения теплопроводности; Теорема Лиувилля; Компактность семейства решений; Гладкость объемных потенциалов. Обобщенное решение для уравнения теплопроводности.
Метод продолжения по параметру; Теоремы вложения; Элементы теории функций комплексного переменного.

Рефераты оцениваются по системе «зачтено» / «не зачтено». Оценка «зачтено» ставится в случае раскрытия предложенной темы, оценка «не зачтено» ставится в случае, если тема не раскрыта.

Все задания, выполняемые студентами самостоятельно, подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации.

## 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

| № п/п | Источник |
|---|---|
| 1 | Сабитов К.Б. Уравнения математической физики / К.Б. Сабитов. – М.: Физматлит, 2013. – 352 с. . // «Университетская библиотека online»: электронно-библиотечная система.. – URL: http://biblioclub.ru |

б) дополнительная литература:

| № п/п | Источник |
|---|---|

| | |
|---|---|
| 1 | Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с. – URL:http://www.kuchp.ru |
| 2 | Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В.С. Владимиров, В.П. Михайлов, Михайлова Т.В., Шабунин М.И. – М: Физматлит, 2016. – 512 с. // Электронно-библиотечная система «Лань». – URL: https://e.lanbook.com/ |
| 3 | Карчевский М.М. Лекции по уравнениям математической физики / М.М. Карчевский. – СПб: Издательство «Лань», 2016. – 164 с. // Электронно-библиотечная система «Лань». – URL: https://e.lanbook.com/ |
| 4 | Карчевский М.М. Уравнения математической физики. Дополнительные главы: Учебное пособие / М.М. Карчевский, Павлова М. Ф. – СПб: Издательство «Лань», 2021. – 276 с. // Электронно-библиотечная система «Лань». – URL: https://e.lanbook.com/ |

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)***:**

| № п/п | Ресурс |
|---|---|
| 1 | http://eqworld.ipmnet.ru – интернет-портал, посвященный уравнениям и методам их решений |
| 2 | http://www.lib.vsu.ru - электронный каталог ЗНБ ВГУ |
| 3 | http://www.kuchp.ru – электронный сайт кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, на котором размещены методические издания |
| 4 | ЭБС «Университетская библиотека онлайн» |
| 5 | ЭБС «Лань» |

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

| № п/п | Источник |
|---|---|
| 1 | Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В.С. Владимиров, В.П. Михайлов, Михайлова Т.В., Шабунин М.И. – М: Физматлит, 2016. – 512 с. // Электронно-библиотечная система «Лань». – URL: https://e.lanbook.com/ |
| 2 | Деревич И.В. Практикум по уравнениям математической физики / И. В. Деревич. – СПб: Издательство «Лань», 2017. – 428 с. // Электронно-библиотечная система «Лань». – URL: https://e.lanbook.com/ |
| 3 | Глушко А.В. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными. Постановка основных задач математической физики / А.В. Глушко, А.С. Рябенко. – Воронеж: ИД ВГУ, 2018. – 33 с. – URL:http://www.kuchp.ru |
| 4 | Глушко А.В. Практические занятия по классификации дифференциальных уравнений с частными производными / А.В. Глушко, А.С. Рябенко. – Воронеж: ИД ВГУ, 2018. – 38 с. – URL:http://www.kuchp.ru |
| 5 | Глушко А.В. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными. Постановка основных задач математической физики / А.В. Глушко, А.С. Рябенко. – Воронеж: ИД ВГУ, 2018. – 33 с. – URL: http://www.kuchp.ru |
| 6 | Глушко А.В. Практические занятия по классификации дифференциальных уравнений с частными производными / А.В. Глушко, А.С. Рябенко. – Воронеж: ИД ВГУ, 2018. – 38 с. – URL: http://www.kuchp.ru |
| 7 | Глушко А.В. Дифференциальные уравнения с частными производными гиперболического и параболического типов / А.В. Глушко, Е.А. Логинова, С.А. Ткачева. – Воронеж: ИД ВГУ, 2019. – 80 с. – URL: http://www.kuchp.ru |

## 17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=18054).

Перечень необходимого программного обеспечения: Microsoft Windows Server 2008, Microsoft Windows 10 Enterprise 64 bit, LibreOffice 6 (*Writer (текстовый процессор), Calc (электронные таблицы), Impress (презентации), Draw (векторная графика), Base (база данных), Math (редактор формул)*), Maxima, Total Commander, WinDjView, Foxit Reader, 7-Zip, Mozilla Firefox.

**18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:** Учебная аудитория для проведения занятий лекционного и семинарского типа, текущего контроля и промежуточной аттестации (394018, г. Воронеж, площадь Университетская, д. 1, пом. I). Специализированная мебель.

**19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций**

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

| № п/п | Наименование раздела дисциплины (модуля) | Компетенция(и) | Индикатор(ы) достижения компетенции | Оценочные средства |
|---|---|---|---|---|
| 1.1 | Формулы Грина. Фундаментальное решение | ПК-1, ПКВ-3 | ПК-1.1, ПК 1.2, ПК-1.3, ПКВ-3.1, ПКВ-3.2, ПКВ-3.3 | Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену |
| 1.2 | Постановка краевых задач и задачи Коши. Принцип максимума в ограниченной области | ПК-1, ПКВ-3 | ПК-1.1, ПК 1.2, ПК-1.3, ПКВ-3.1, ПКВ-3.2, ПКВ-3.3 | Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену |
| 1.3 | Априорные оценки решений краевых задач. Теоремы единственности. | ПК-1, ПКВ-3 | ПК-1.1, ПК 1.2, ПК-1.3, ПКВ-3.1, ПКВ-3.2, ПКВ-3.3 | Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену |
| 1.4 | Аналитичность решений по пространственной переменной | ПК-1, ПКВ-3 | ПК-1.1, ПК 1.2, ПК-1.3, ПКВ-3.1, ПКВ-3.2, ПКВ-3.3 | Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену |
| 1.5 | Теоремы об устранимой особенности | ПК-1, ПКВ-3 | ПК-1.1, ПК 1.2, ПК-1.3, ПКВ-3.1, ПКВ-3.2, ПКВ-3.3 | Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену |
| 1.6 | Построение решения задачи Коши при помощи преобразования Фурье | ПК-1, ПКВ-3 | ПК-1.1, ПК 1.2, ПК-1.3, ПКВ-3.1, ПКВ-3.2, ПКВ-3.3 | Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену |
| 1.7 | Гипоэллиптичность оператора теплопроводности | ПК-1, ПКВ-3 | ПК-1.1, ПК 1.2, ПК-1.3, ПКВ-3.1, ПКВ-3.2, ПКВ-3.3 | Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену |
| 2.1 | Представление решений с помощью потенциалов. Бесконечная дифференцируемость решений | ПК-1, ПКВ-3 | ПК-1.1, ПК 1.2, ПК-1.3, ПКВ-3.1, ПКВ-3.2, ПКВ-3.3 | Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену |
| 2.2 | Принцип максимума в неограниченной области. Строгий принцип максимума | ПК-1, ПКВ-3 | ПК-1.1, ПК 1.2, ПК-1.3, ПКВ-3.1, ПКВ-3.2, ПКВ-3.33 | Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену |
| 2.3 | Оценки решений неоднородных уравнений | ПК-1, ПКВ-3 | ПК-1.1, ПК 1.2, ПК-1.3, ПКВ-3.1, ПКВ-3.2, ПКВ-3.3 | Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену |
| 2.4 | Априорные оценки решений задачи Коши. Теорема единственности для задачи Коши. Стабилизация решений | ПК-1, ПКВ-3 | ПК-1.1, ПК 1.2, ПК-1.3, ПКВ-3.1, ПКВ-3.2, ПКВ-3.3 | Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену |
| 2.5 | Оценки производных решений уравнения теплопроводности | ПК-1, ПКВ-3 | ПК-1.1, ПК 1.2, ПК-1.3, ПКВ-3.1, ПКВ-3.2, ПКВ-3.3 | Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену |
| 2.6 | Теорема Лиувилля | ПК-1, ПКВ-3 | ПК-1.1, ПК 1.2, ПК-1.3, ПКВ- | Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену |

| № п/п | Наименование раздела дисциплины (модуля) | Компетен ция(и) | Индикатор(ы) достижения компетенции | Оценочные средства |
|---|---|---|---|---|
| | | | 3.1, ПКВ-3.2, ПКВ-3.3 | |
| 2.7 | Компактность семейства решений | ПК-1, ПКВ-3 | ПК-1.1, ПК 1.2, ПК-1.3, ПКВ-3.1, ПКВ-3.2, ПКВ-3.3 | Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену |
| 2.8 | Гладкость объемных потенциалов. Обобщенное решение для уравнения теплопроводности | ПК-1, ПКВ-3 | ПК-1.1, ПК 1.2, ПК-1.3, ПКВ-3.1, ПКВ-3.2, ПКВ-3.3 | Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену |
| Промежуточная аттестация форма контроля - Экзамен | | | | Перечень вопросов к экзамену |

## 20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

**Примерный перечень тестовых заданий**

1. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, $T$ – оператор теплопроводности. Оператор теплопроводности действует на функцию $u(x,t)$ следующим образом:

а) $Tu(x,t) = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$, б) $Tu(x,t) = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$, в) $Tu(x,t) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$.

2. Пусть $\omega_\tau = \{(x,t) \big| x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < t \le \tau\}$, $u(x,t) \in C^{2,1}(\omega_\tau) \cap C^0(\bar{\omega}_\tau)$, в $\omega_\tau$

$$Tu(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = 0,$$

и в точке $(x^0, t^0) \in \omega_\tau$ функция $u(x,t)$ достигает наибольшее или наименьшее значение. Будет ли при $(x,t) \in \omega_{t^0}$ выполнено равенство $u(x,t) = u(x^0, t^0)$?

а) да. б) нет.

3. Пусть $\omega$ ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, лежащая в слое $\{(x,t) \big| t' < t < t''\}$, функция $u(x,t) \in C^{2,1}(\omega)$ и является в $\omega$ решением уравнения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = 0.$$

Будет ли функция $u(x,t)$ аналитической по пространственной переменной $x$?

а) да. б) нет.

4. Пусть $\omega_\tau = \{(x,t) \big| x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < t \le \tau\}$, $S_\tau = \partial\Omega \times (0;\tau)$, $u(x,t) \in C^{2,1}(\bar{\omega}_\tau)$, $\nu$ – единичный вектор внешней нормали к $S_\tau$, $Tu(x,t) = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$, $T^* u(x,t) = -\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$.

Первой формулой Грина для оператора теплопроводности называется формула

а) $$\int\limits_{\omega_\tau} v(x,t) Tu(x,t)\, dxdt = \int\limits_{\omega_\tau} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} - u(x,t) \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\Big) dxdt - \int\limits_{S_\tau} v(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} ds + \\ + \int\limits_{\Omega} u(x,\tau)\, v(x,\tau)\, dx - \int\limits_{\Omega} u(x,0)\, v(x,0)\, dx,$$

б) $$-\int\limits_{\omega_\tau} u(x,t) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_i^2} dxdt = \int\limits_{\omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} dxdt - \int\limits_{S_\tau} u(x,t) \frac{\partial v(x,t)}{\partial \nu} ds,$$

в) $\int\limits_{\omega_\tau} (v(x,t)Tu(x,t) - u(x,t)T^* v(x,t))\,dxdt = \int\limits_{S_\tau} (u(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial\nu} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial\nu}v(x,t))\,ds +$
$+\int\limits_{\Omega} u(x,\tau)\,v(x,\tau)\,dx - \int\limits_{\Omega} u(x,0)\,v(x,0)\,dx.$

5. Введем обозначения: $\omega$ ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, лежащая в слое $(x,t)\big|\ t' < t < t''$, $S$ граничные точки области $\omega$, лежащие в слое $(x,t)\big|\ t' < t < t''$, $\Omega' = \bar{\omega} \cap\ (x,t)\big|\ t = t'$, $\Omega''$ множество точек из $\bar{\omega} \cap\ (x,t)\big|\ t = t''$ которые являются внутренними точками этого множества в гиперплоскости $t = t''$, $\sigma = \bar{S} \cup \Omega'$, $\tilde{\omega} = \omega \cup \Omega''$. Если $u(x,t) \in \tilde{N}^{2,1}(\tilde{\omega}) \cap C^0(\bar{\omega})$ и в $\tilde{\omega}$

$$Tu(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = f(x,t)$$

будет ли при $(x,t) \in \bar{\omega}$ выполнена оценка

$$\min_{(x,t)\in\sigma} u(x,t) - \tau \sup_{(x,t)\in\omega} \left|f(x,t)\right| \le u(x,t) \le \max_{(x,t)\in\sigma} u(x,t) + \tau \sup_{(x,t)\in\omega} \left|f(x,t)\right| ?$$

а) да. б) нет.

6. Пусть $G^0 = \ (x,t)\big|x \in \mathbb{R}^n, t \le t^0$, функция $u(x,t) \in C^{2,1}(G^0)$ в $G^0$ является решением уравнения $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = 0$ и существуют такие константы $C_1 > 0$ и $q \ge 0$, что в $G^0$ выполнена оценка

$$\left|u(x,t)\right| \le C_1(1 + \left|x\right|^2 + \left|t\right|)^{q/2},$$

тогда в $G^0$ функция $u(x,t)$ будет

а) не зависеть от $x$, б) не зависеть от $t$, в) многочленом относительно $x$ и $t$.

7. Пусть $\omega_\tau = \ (x,t)\big|x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < t \le \tau$, $S_\tau = \partial\Omega \times (0;\tau)$, $u(x,t) \in C^{2,1}(\bar{\omega}_\tau)$, $\nu$ – единичный вектор внешней нормали к $S_\tau$, $Tu(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$, $T^* u(x,t) = -\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$. Второй формулой Грина для оператора теплопроводности называется формула

а) $\int\limits_{\omega_\tau} v(x,t)Tu(x,t)\,dxdt = \int\limits_{\omega_\tau} (\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} - u(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t})\,dxdt - \int\limits_{S_\tau} v(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial\nu}\,ds +$
$+\int\limits_{\Omega} u(x,\tau)\,v(x,\tau)\,dx - \int\limits_{\Omega} u(x,0)\,v(x,0)\,dx,$

б) $-\int\limits_{\omega_\tau} u(x,t)\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_i^2}\,dxdt = \int\limits_{\omega_\tau} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i}\,dxdt - \int\limits_{S_\tau} u(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial\nu}\,ds$,

в) $\int\limits_{\omega_\tau} (v(x,t)Tu(x,t) - u(x,t)T^* v(x,t))\,dxdt = \int\limits_{S_\tau} (u(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial\nu} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial\nu}v(x,t))\,ds +$
$+\int\limits_{\Omega} u(x,\tau)\,v(x,\tau)\,dx - \int\limits_{\Omega} u(x,0)\,v(x,0)\,dx.$

8. Пусть $G_\tau = \ (x,t)\big|x \in \mathbb{R}^n, 0 < t \le \tau$, $u(x,t) \in C^{2,1}(G_\tau) \cap C^0(\bar{G}_\tau)$, существует константа $M$ такая, что при $(x,t) \in G_\tau$ выполнена оценка $\left|u(x,t)\right| \le M$ и в $G_\tau$

$$Tu(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = f(x,t).$$

Будет ли при $(x,t) \in G_\tau$ выполнена оценка

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,0) - \tau \sup_{(x,t)\in G_\tau} \left|f(x,t)\right| \le u(x,t) \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,0) + \tau \sup_{(x,t)\in G_\tau} \left|f(x,t)\right| ?$$

а) да. б) нет.

9. Пусть $G^0 = (x,t)\big| x\in\mathbb{R}^n, t\le t^0$ , функция $u(x,t)\in C^{2,1}(G^0)$ в $G^0$ является решением уравнения $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}=0$ и существуют такие константы $C_1>0$ и $q\ge 0$, что в $G^0$ выполнена оценка

$$\left|u(x,t)\right|\le C_1(1+\left|x\right|^2+\left|t\right|)^{q/2},$$

тогда в $G^0$ функция $u(x,t)$ будет многочленом относительно $x$ и $t$ степень не выше

а) $q$, б) $[q]$, в) $[q]+2$.

10. Пусть $x\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}$, $Tu(x,t)=\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$. Фундаментальным решением для уравнения теплопроводности называется функция $\Gamma(x,x^0,t,t^0)\in D'(\mathbb{R}^{n+1})$ такая, что

а) $T\Gamma(x,x^0,t,t^0)=0$, б) $T\Gamma(x,x^0,t,t^0)=\Gamma(x,x^0,t,t^0)$, в) $T\Gamma(x,x^0,t,t^0)=\delta(x-x^0,t-t^0)$.

11. Пусть $\omega_\tau = (x,t)\big| x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n, 0<t\le\tau$ , $S_\tau=\partial\Omega\times(0;\tau)$, $u(x,t)\in C^{2,1}(\bar\omega_\tau)$ и выполнены равенства

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}=f(x,t),\ (x,t)\in\omega_\tau,$$
$$u(x,t)=0,(x,t)\in S_\tau.$$

Будет ли выполнена оценка

$$\int\limits_{\omega_{t^0}}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\Big)^2+u(x,t)\Big)\,dxdt+\int\limits_{\Omega}u^2(x,t^0)\ dx\le$$
$$\le K(\tau)\Big[\int\limits_{\Omega}u^2(x,0)\ dx+\int\limits_{\omega_{t^0}}f^2(x,t)\,dxdt\Big]?$$

а) да. б) нет.

12. Введем обозначение $\omega_\tau = (x,t)\big| x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n, 0<t\le\tau$ . Пусть $(x^0,t^0)\in\omega_\tau$, функция $u(x,t)$ в $\omega_\tau\setminus(x^0,t^0)$ является решением уравнения $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}=0$. Если $u(x,t)\in C^{2,1}(\bar\omega_\tau\setminus(x^0,t^0))$ и для любого $\varepsilon>0$ найдется $\omega_\tau\setminus(x^0,t^0)$ такое, что

$$\int\limits_{|x-x_0<\rho|}\left|u(x,t)\right|dx<\varepsilon,$$

тогда в точке $(x^0,t^0)$ функция $u(x,t)$ имеет

а) устранимую особенность, б) не устранимую особенность.

13. Пусть $x\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}$, $\Gamma(x,x^0,t,t^0)$ – фундаментальное решение уравнения теплопроводности, тогда функция $\Gamma(x,x^0,t,t^0)$ выглядит следующим образом:

а) $\Gamma(x,x^0,t,t^0)=\dfrac{\theta(t-t^0)}{(2\sqrt{\pi(t-t^0)})^n}\exp\Big[-\dfrac{\left|x-x^0\right|^2}{4(t-t^0)}\Big]$, б) $\Gamma(x,x^0,t,t^0)=\dfrac{1}{(2\sqrt{\pi(t-t^0)})^n}\exp\Big[-\dfrac{\left|x-x^0\right|^2}{4(t-t^0)}\Big]$,

в) $\Gamma(x,x^0,t,t^0)=\dfrac{1}{(2\sqrt{\pi(t-t^0)})^n}\exp\Big[-\dfrac{\left|x-x^0\right|}{4(t-t^0)}\Big]$.

14. Пусть $\omega_\tau = (x,t)\big| x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n, 0<t\le\tau$ , $S_\tau=\partial\Omega\times(0;\tau)$, $\nu$ – единичный вектор внешней нормали к $S_\tau$, $u(x,t)\in C^{2,1}(\bar\omega_\tau)$ и выполнены равенства

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}=f(x,t),\ (x,t)\in\omega_\tau,$$
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu}=0,(x,t)\in S_\tau.$$

Будет ли выполнена оценка

$$\int\limits_{\omega_{t^0}} (\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i})^2 + u(x,t))\, dxdt + \int\limits_{\Omega} u^2(x,t^0)\ dx \le$$
$$\le K(\tau)[\int\limits_{\Omega} u^2(x,0)\ dx + \int\limits_{\omega_{t^0}} f^2(x,t)\, dxdt]?$$

а) да. б) нет.

15. Введем обозначения: $\omega$ ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, лежащая в слое $(x,t)\big|\ t' < t < t''$, $S$ граничные точки области $\omega$, лежащие в слое $(x,t)\big|\ t' < t < t''$, $\Omega' = \bar{\omega} \cap\ (x,t)\big|\ t = t'$, $\Omega''$ множество точек из $\bar{\omega} \cap\ (x,t)\big|\ t = t''$ которые являются внутренними точками этого множества в гиперплоскости $t = t''$, $\sigma = \bar{S} \cup \Omega'$, $\tilde{\omega} = \omega \cup \Omega''$. Пусть задана последовательность $u_m(x,t)$, такая что для любого $m$ $u_m(x,t) \in \tilde{N}^{2,1}(\tilde{\omega}) \cap C^0(\bar{\omega})$ и в $\tilde{\omega}$

$$\frac{\partial u_m(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u_m(x,t)}{\partial x_i^2} = 0 .$$

Известно, что $u(x,t)$ равномерный предел на $\bar{\omega}$ функций $u_m(x,t)$, тогда в $\tilde{\omega}$

а) $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} < 0$, б) $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = 0$, в) $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} > 0$.

16. Пусть $\omega_\tau = \ (x,t)\big|x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < t \le \tau$, $S_\tau = \partial\Omega \times (0;\tau)$, $u(x,t) \in C^{2,1}(\bar{\omega}_\tau)$, $\nu$ – единичный вектор внешней нормали к $S_\tau$, $\Gamma(x,x^0,t,t^0)$ – фундаментальное решение уравнения теплопроводности, тогда если в $\omega_\tau$

$$Tu(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = 0 ,$$

то для $(x^0,t^0) \in \omega_\tau$ получаем, что

а) $u(x^0,t^0) = \int\limits_{\omega_{t^0}} \Gamma(x^0,x,t^0,t)\, dxdt + \int\limits_{S_{t^0}} (\Gamma(x^0,x,t^0,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} - \frac{\partial \Gamma(x^0,x,t^0,t)}{\partial \nu} u(x,t))\, ds$,

б) $$u(x^0,t^0) = \int\limits_{\omega_{t^0}} \Gamma(x^0,x,t^0,t) f(x,t)\, dxdt + \int\limits_{S_{t^0}} (\Gamma(x^0,x,t^0,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} - \frac{\partial \Gamma(x^0,x,t^0,t)}{\partial \nu} u(x,t))\, ds +$$
$$+ \int\limits_{\Omega} u(x,0)\, \Gamma(x^0,x,t^0,0)\, dx,$$

в) $u(x^0,t^0) = \int\limits_{S_{t^0}} (\Gamma(x^0,x,t^0,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} - \frac{\partial \Gamma(x^0,x,t^0,t)}{\partial \nu} u(x,t))\, ds + \int\limits_{\Omega} u(x,0)\, \Gamma(x^0,x,t^0,0)\, dx$.

17. Пусть $\omega_\tau = \ (x,t)\big|x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < t \le \tau$, $S_\tau = \partial\Omega \times (0;\tau)$, $u(x,t) \in C^{2,1}(\bar{\omega}_\tau)$ и выполнены равенства

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = 0,\ (x,t) \in \omega_\tau,$$
$$u(x,t) = 0, (x,t) \in S_\tau.$$

Тогда при $t^0 < \tau$ всегда будет выполнена оценка

а) $\int\limits_{\Omega} u^2(x,t^0)\ dx = \int\limits_{\Omega} u^2(x,0)\ dx$, б) $\int\limits_{\Omega} u^2(x,t^0)\ dx > \int\limits_{\Omega} u^2(x,0)\ dx$, в) $\int\limits_{\Omega} u^2(x,t^0)\ dx \le \int\limits_{\Omega} u^2(x,0)\ dx$.

18. Введем обозначения: $\omega$ ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, лежащая в слое $(x,t)\big|\ t' < t < t''$, $S$ граничные точки области $\omega$, лежащие в слое $(x,t)\big|\ t' < t < t''$, $\Omega' = \bar{\omega} \cap\ (x,t)\big|\ t = t'$, $\Omega''$ множество точек из $\bar{\omega} \cap\ (x,t)\big|\ t = t''$ которые являются внутренними точками этого множества в гиперплоскости $t = t''$, $\sigma = \bar{S} \cup \Omega'$, $\tilde{\omega} = \omega \cup \Omega''$. Пусть задана последовательность $u_m(x,t)$, такая что для любого $m$ $u_m(x,t) \in \tilde{N}^{2,1}(\tilde{\omega}) \cap C^0(\bar{\omega})$ и в $\tilde{\omega}$

$$\frac{\partial u_m(x,t)}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u_m(x,t)}{\partial x_i^2}=0\,.$$

Известно, что $u(x,t)$ равномерный предел на $\sigma$ последовательности $u_m(x,t)$ , тогда в $\tilde{\omega}$

а) $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}<0$, б) $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}=0$, в) $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}>0$.

19. Пусть $\omega_\tau = \ (x,t)\big| x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n, 0<t\le\tau$ , $S_\tau=\partial\Omega\times(0;\tau)$, $\nu$ – единичный вектор внешней нормали к $S_\tau$, $u(x,t)\in C^{2,1}(\bar{\omega}_\tau)$ и выполнены равенства

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}=f(x,t),\ (x,t)\in\omega_\tau,$$
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu}=0,(x,t)\in S_\tau.$$

Тогда при $t^0<\tau$ всегда будет выполнена оценка

а) $\int_\Omega u^2(x,t^0)\ dx=\int_\Omega u^2(x,0)\ dx$, б) $\int_\Omega u^2(x,t^0)\ dx>\int_\Omega u^2(x,0)\ dx$, в) $\int_\Omega u^2(x,t^0)\ dx\le\int_\Omega u^2(x,0)\ dx$.

20. Введем обозначения: $\omega$ ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, лежащая в слое $(x,t)\big|\ t'<t<t''$ , $S$ граничные точки области $\omega$, лежащие в слое $(x,t)\big|\ t'<t<t''$ , $\Omega'=\bar{\omega}\cap\ (x,t)\big|\ t=t'$ , $\Omega''$ множество точек из $\bar{\omega}\cap\ (x,t)\big|\ t=t''$ которые являются внутренними точками этого множества в гиперплоскости $t=t''$, $\sigma=\bar{S}\cup\Omega'$, $\tilde{\omega}=\omega\cup\Omega''$. Пусть задана последовательность $u_m(x,t)$ , такая что для любого $m$ $u_m(x,t)\in\tilde{N}^{2,1}(\tilde{\omega})\cap C^0(\bar{\omega})$ и в $\tilde{\omega}$

$$\frac{\partial u_m(x,t)}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u_m(x,t)}{\partial x_i^2}=0\,.$$

Известно, что $u(x,t)$ равномерный предел на $\sigma$ последовательности $u_m(x,t)$ . Будет ли функция $u(x,t)$ равномерным пределом последовательности $u_m(x,t)$ на $\bar{\omega}$?

а) да. б) нет.

21. Пусть $\omega_\tau = \ (x,t)\big| x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n, 0<t\le\tau$ , $u(x,t)\in C^{2,1}(\bar{\omega}_\tau)$ и в $\omega_\tau$

$$Tu(x,t)=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}=0\,.$$

Верно ли утверждение, что тогда в $\omega_\tau$ функция $u(x,t)$ будет бесконечно дифференцируемой?

а) да. б) нет.

22. Пусть $\omega_\tau = \ (x,t)\big| x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n, 0<t\le\tau$ , $S_\tau=\partial\Omega\times(0;\tau)$. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}=0,\ (x,t)\in\omega_\tau,\\ u(x,t)=\psi(x,t),(x,t)\in S_\tau,\\ u(x,0)=u_0(x),\ x\in\Omega.\end{cases}$$

Будет ли у данной задачи единственное решение в классе $C^{2,1}(\omega_\tau)\cap C^0(\bar{\omega}_\tau)$?

а) да. б) нет.

23. Пусть $G_\tau = \ (x,t)\big| x\in\mathbb{R}^n, 0<t\le\tau$ . Рассмотрим задачу

$$\begin{cases}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}=f(x,t),\ (x,t)\in G_\tau,\\ u(x,0)=\psi(x),\ x\in\mathbb{R}^n.\end{cases}$$

Чему равно решение данной задачи?

а) $\dfrac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}dy+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}\dfrac{f(y,s)}{(2\sqrt{\pi(t-s)})^n}e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}dyds$, б) $\dfrac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}dy+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}\dfrac{f(y,s)}{(2\sqrt{\pi(t-s)})^n}e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}dyds$,

в) $\dfrac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}dy+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}\dfrac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}}{(2\sqrt{\pi(t-s)})^n}dyds$.

24. Пусть $\omega_\tau = \{(x,t)\,|\,x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n, 0<t\le\tau\}$, $S_\tau=\partial\Omega\times(0;\tau)$, $\nu$ – единичный вектор внешней нормали к $S_\tau$,

$$Tu(x,t)=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}.$$

Постановка первой краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности в $\omega_\tau$ выглядит следующим образом:

а) $\begin{cases}Tu(x,t)=0,(x,t)\in\omega_\tau,\\ u(x,0)=u_0(x),\ x\in\Omega,\\ u(x,t)=\psi_1(x,t),(x,t)\in S_\tau,\end{cases}$ б) $\begin{cases}Tu(x,t)=0,(x,t)\in\omega_\tau,\\ u(x,0)=u_0(x),\ x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial\nu}=\psi_1(x,t),(x,t)\in S_\tau,\end{cases}$ в) $\begin{cases}Tu(x,t)=0,(x,t)\in\omega_\tau,\\ u(x,0)=u_0(x),\ x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial\nu}+au(x,t)=\psi_1(x,t),(x,t)\in S_\tau.\end{cases}$

25. Пусть $\omega_\tau = \{(x,t)\,|\,x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n, 0<t\le\tau\}$, $S_\tau=\partial\Omega\times(0;\tau)$. Известно, что функции $u_1(x,t),u_2(x,t)\in C^{2,1}(\omega_\tau)\cap C^0(\overline{\omega}_\tau)$ и являются решениями задач

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}-\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x_i^2}=f_1(x,t),\ (x,t)\in\omega_\tau,\\ u_1(x,t))=\psi_1(x,t),(x,t)\in S_\tau,\\ u_1(x,0)=u_{01}(x),\ x\in\Omega,\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}-\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x_i^2}=f_2(x,t),\ (x,t)\in\omega_\tau,\\ u_2(x,t)=\psi_2(x,t),(x,t)\in S_\tau,\\ u_2(x,0)=u_{02}(x),\ x\in\Omega.\end{cases}$$

Будет ли в $\omega_\tau$ выполнена оценка

$$|u_1(x,t)-u_2(x,t)|\le\sup_{x\in\Omega}|u_{01}(x)-u_{02}(x)|+\tau\sup_{(x,t)\in\omega_\tau}|f_1(x,t)-f_2(x,t)|+\sup_{(x,t)\in S_\tau}|\psi_1(x,t)-\psi_2(x,t)|?$$

а) да. б) нет.

26. Пусть $G_\tau = \{(x,t)\,|\,x\in\mathbb{R}^n, 0<t\le\tau\}$. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}=0,\ (x,t)\in G_\tau,\\ u(x,0)=\psi(x),\ x\in\mathbb{R}^n.\end{cases}$$

Чему равно решение данной задачи?

а) $\dfrac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}dy+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}\dfrac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}}{(2\sqrt{\pi(t-s)})^n}dyds$, б) $\dfrac{\psi(x)}{(2\sqrt{\pi t})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}dy$, в) $\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}\dfrac{\psi(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}}{(2\sqrt{\pi(t-s)})^n}dyds$.

27. Пусть $\omega_\tau = \{(x,t)\,|\,x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n, 0<t\le\tau\}$, $S_\tau=\partial\Omega\times(0;\tau)$, $\nu$ – единичный вектор внешней нормали к $S_\tau$,

$$Tu(x,t)=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}.$$

Постановка второй краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности в $\omega_\tau$ выглядит следующим образом:

а) $\begin{cases}Tu(x,t)=0,(x,t)\in\omega_\tau,\\ u(x,0)=u_0(x),\ x\in\Omega,\\ u(x,t)=\psi_1(x,t),(x,t)\in S_\tau,\end{cases}$ б) $\begin{cases}Tu(x,t)=0,(x,t)\in\omega_\tau,\\ u(x,0)=u_0(x),\ x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial\nu}=\psi_1(x,t),(x,t)\in S_\tau,\end{cases}$ в) $\begin{cases}Tu(x,t)=0,(x,t)\in\omega_\tau,\\ u(x,0)=u_0(x),\ x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial\nu}+au(x,t)=\psi_1(x,t),(x,t)\in S_\tau.\end{cases}$

28. Пусть $G_\tau = \{(x,t) \mid x \in \mathbb{R}^n, 0 < t \le \tau\}$. Известно, что функции $u_1(x,t), u_2(x,t) \in C^{2,1}(G_\tau) \cap C^0(\bar{G}_\tau)$, удовлетворяют в $G_\tau$ оценкам

$$\left|u_1(x,t)\right| \le M_1, \ \left|u_2(x,t)\right| \le M_2,$$

где $M_1$ и $M_1$ – некоторые константы, и являются решениями задач

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x_i^2} = f_1(x,t), \ (x,t) \in G_\tau, \\ u_1(x,0) = u_{01}(x), \ x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x_i^2} = f_2(x,t), \ (x,t) \in G_\tau, \\ u_2(x,0) = u_{02}(x), \ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Будет ли при $(x,t) \in G_\tau$ выполнена оценка

$$\left|u_1(x,t) - u_2(x,t)\right| \le \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left|u_{01}(x) - u_{02}(x)\right| + \tau \sup_{(x,t) \in G_\tau} \left|f_1(x,t) - f_2(x,t)\right| ?$$

а) да. б) нет.

27. Пусть $G_\tau = \{(x,t) \mid x \in \mathbb{R}^n, 0 < t \le \tau\}$. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = f(x,t), \ (x,t) \in G_\tau, \\ u(x,0) = 0, \ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Чему равно решение данной задачи?

а) $\dfrac{f(x,t)}{(2\sqrt{\pi t})^n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y,s)}{(2\sqrt{\pi(t-s)})^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} dyds$, б) $\displaystyle\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y,s)}{(2\sqrt{\pi(t-s)})^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} dyds$,

в) $\dfrac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(y,t) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}}{(2\sqrt{\pi(t-s)})^n} dyds$.

30. Пусть $\omega_\tau = \{(x,t) \mid x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < t \le \tau\}$, $S_\tau = \partial\Omega \times (0;\tau)$, $\nu$ – единичный вектор внешней нормали к $S_\tau$,

$$Tu(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}.$$

Постановка третье краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности в $\omega_\tau$ выглядит следующим образом:

а) $\begin{cases} Tu(x,t) = 0, (x,t) \in \omega_\tau, \\ u(x,0) = u_0(x), \ x \in \Omega, \\ u(x,t) = \psi_1(x,t), (x,t) \in S_\tau, \end{cases}$ б) $\begin{cases} Tu(x,t) = 0, (x,t) \in \omega_\tau, \\ u(x,0) = u_0(x), \ x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = \psi_1(x,t), (x,t) \in S_\tau, \end{cases}$ в) $\begin{cases} Tu(x,t) = 0, (x,t) \in \omega_\tau, \\ u(x,0) = u_0(x), \ x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} + au(x,t) = \psi_1(x,t), (x,t) \in S_\tau. \end{cases}$

31. Пусть $\omega_\infty = \{(x,t) \mid x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < t < \infty\}$, $S_\infty = \partial\Omega \times (0;\infty)$. Известно, что функция $u(x,t) \in C^{2,1}(\omega_\infty) \cap C^0(\bar{\omega}_\infty)$, являются решением уравнения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = 0, \ (x,t) \in \omega_\infty$$

и удовлетворяет граничному условию

$$u(x,t)) = 0, (x,t) \in S_\infty.$$

Тогда при $t \to \infty$

а) для любого фиксированного $x \in \Omega$ функция $u(x,t)$ стремится к нулю,

б) функция $u(x,t)$ стремится к нулю равномерно на $\Omega$.

32. Пусть $\omega$ – область в $\mathbb{R}^{n+1}$, а функция $u(x,t)$ является обобщенным решением уравнения $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = 0$ в области $\omega$, тогда функция $u(x,t)$

а) только два раза непрерывно дифференцируема в $\omega$, б) не имеет непрерывных производных в $\omega$,

в) бесконечно дифференцируема в $\omega$.

33. Пусть $G_\tau = (x,t)\big| x \in \mathbb{R}^n, 0 < t \le \tau$ . Постановка задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности в $G_\tau$ выглядит следующим образом:

а) $\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = 0, (x,t) \in G_\tau, \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = 0, (x,t) \in G_\tau, \\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = 0, (x,t) \in G_\tau, \\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^n, \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x),\ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$

34. Пусть $\omega_\infty = (x,t)\big| x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < t < \infty$ , $S_\infty = \partial\Omega \times (0;\infty)$. Известно, что функция $u(x,t) \in C^{2,1}(\omega_\infty) \cap C^0(\bar{\omega}_\infty)$, являются решением уравнения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = 0,\ (x,t) \in \omega_\infty$$

и удовлетворяет граничному условию

$$u(x,t) = 0, (x,t) \in S_\infty .$$

Пусть $x \in \Omega$, тогда $\lim\limits_{t \to \infty} u(x,t)$ равен

а) $0$, б) $1$, в) $\infty$.

35. Является ли оператор теплопроводности гипоэллиптическим?

а) да. б) нет.

36. Пусть $\omega$ ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, лежащая в слое $(x,t)\big|\ t' < t < t''$ , $S$ граничные точки области $\omega$, лежащие в слое $(x,t)\big|\ t' < t < t''$ , $\Omega' = \bar{\omega} \cap\ (x,t)\big|\ t = t'$ , $\Omega''$ множество точек из $\bar{\omega} \cap\ (x,t)\big|\ t = t''$ которые являются внутренними точками этого множества в гиперплоскости $t = t''$, $\sigma = \bar{S} \cup \Omega'$, $\tilde{\omega} = \omega \cup \Omega''$, $Tu(x,t) = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$. Если $u(x,t) \in \tilde{N}^{2,1}(\tilde{\omega}) \cap C^0(\bar{\omega})$ и в $\tilde{\omega}$ $Tu(x,t) \ge 0$, то для любых $(x,t) \in \tilde{\omega}$ выполнена оценка

а) $\max\limits_{(x,t)\in\sigma} u(x,t) \le u(x,t)$, б) $\min\limits_{(x,t)\in\sigma} u(x,t) \le u(x,t)$.

37. Пусть $G_\infty = (x,t)\big| x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < \infty$ . Известно, что функция $u(x,t) \in C^{2,1}(G_\infty) \cap C^0(\bar{G}_\infty)$, являются решением уравнения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = 0,\ (x,t) \in G_\infty ,$$

существует константа $M$ такая, что при $(x,t) \in G_\infty$ выполнена оценка $\big|u(x,t)\big| \le M$ и $\lim\limits_{|x| \to \infty} u(x,0) = 0$. Какое из следующих утверждений верное?

а) $u(x,t)$ равномерно на $\mathbb{R}^n$ стремится к нулю при $t \to \infty$.

б) $u(x,t)$ равномерно на $\mathbb{R}^n$ при $t \to \infty$ стремится к некоторой константе отличной от нуля.

в) $u(x,t)$ не стремится к нулю при $t \to \infty$.

38. Является ли оператор теплопроводности гипоэллиптическим?

а) да. б) нет.

39. Пусть $\omega$ ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, лежащая в слое $(x,t)\big|\ t' < t < t''$ , $S$ граничные точки области $\omega$, лежащие в слое $(x,t)\big|\ t' < t < t''$ ,

$\Omega' = \bar{\omega} \cap \ (x,t) \big| \ t = t'$ , $\Omega''$ множество точек из $\bar{\omega} \cap \ (x,t) \big| \ t = t''$ которые являются внутренними точками этого множества в гиперплоскости $t = t''$, $\sigma = \bar{S} \cup \Omega'$, $\tilde{\omega} = \omega \cup \Omega''$, $Tu(x,t) = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$. Если $u(x,t) \in \tilde{N}^{2,1}(\tilde{\omega}) \cap C^0(\bar{\omega})$ и в $\tilde{\omega}$ $Tu(x,t) \le 0$, то для любых $(x,t) \in \tilde{\omega}$ выполнена оценка

а) $u(x,t) \le \max\limits_{(x,t)\in\sigma} u(x,t)$ ,   б) $u(x,t) \le \min\limits_{(x,t)\in\sigma} u(x,t)$ .

40. Пусть $\omega^{R+\rho} = \ (x,t) \big| |x|^2 + |t| < (R+\rho)^2, t < 0$ . Функция $u(x,t)$ в $\omega^{R+\rho}$ является решением уравнения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = 0,$$

и $u(x,t) \in C^{2,1}(\bar{\omega}^{R+\rho})$. Будет ли при $(x,t) \in \omega^R = \ (x,t) \big| |x|^2 + |t| < R^2, t < 0$ выполнена оценка

$$\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i})^2 \le \frac{c}{\rho^2} \max_{(x,t)\in\bar{\omega}^{R+\rho}} |u(x,t)|^2 \text{ ?}$$

а) да.   б) нет.

41. Пусть $\omega$ – область в $\mathbb{R}^{n+1}$, а функция $u(x,t)$ является обобщенным решением уравнения $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = 0$ в области $\omega$, тогда функция $u(x,t)$

а) только два раза непрерывно дифференцируема в $\omega$,
б) не имеет непрерывных производных в $\omega$,
в) бесконечно дифференцируема в $\omega$.

42. Пусть $G_\tau = \ (x,t) \big| x \in \mathbb{R}^n, 0 < t \le \tau$ , $u(x,t) \in C^{2,1}(G_\tau) \cap C^0(\bar{G}_\tau)$, существует константа $M$ такая, что при $(x,t) \in G_\tau$ выполнена оценка $|u(x,t)| \le M$ и в $G_\tau$

$$Tu(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = 0 \text{ .}$$

Будет ли при $(x,t) \in G_\tau$ выполнена оценка

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,0) \le u(x,t) \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,0) \text{ ?}$$

а) да.   б) нет.

43. Пусть $\omega^{R+\rho} = \ (x,t) \big| |x|^2 + |t| < (R+\rho)^2, t < 0$ . Функция $u(x,t)$ в $\omega^{R+\rho}$ является решением уравнения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = 0,$$

и $u(x,t) \in C^{2,1}(\bar{\omega}^{R+\rho})$. Будет ли при $|\alpha| = k$, $p \ge 0$ и $(x,t) \in \omega^R = \ (x,t) \big| |x|^2 + |t| < R^2, t < 0$ выполнена оценка

$$\left| \frac{\partial^p D_x^\alpha u(x,t)}{\partial t^p} \right|^2 \le n^{2p} (\frac{c(k+2p)^2}{\rho^2})^{k+2p} \max_{(x,t)\in\bar{\omega}^{R+\rho}} |u(x,t)|^2 \text{ ?}$$

а) да.   б) нет.

**Примерный перечень задач для контрольных работ**

1. Вывести первую и вторую формулу Грина для уравнения теплопроводности.
2. Записать постановку основных задач для уравнения теплопроводности.
3. Построить априорные оценки решений краевых задач для уравнения теплопроводности.

4. Записать фундаментальное решение уравнения теплопроводности и сформулировать его свойства.

5. Доказать принцип максимума для уравнения теплопроводности в ограниченной области.

6. Сформулировать и доказать теорему Лиувилля.

7. Построить решение задачи Коши для уравнения теплопроводности.

8. Сформулировать и доказать теоремы о стабилизации решения уравнения теплопроводности в ограниченной и неограниченной области.

9. Получить оценки по модулю для решения уравнения теплопроводности.

10. Доказать принцип максимума для уравнения теплопроводности в неограниченной области.

11. Доказать гладкость обобщенного решения уравнения теплопроводности.

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

К основным формам текущего контроля можно отнести устный опрос, проверку домашних заданий, тестовые задания, контрольные работы.

В ходе тестовых заданий обучающемуся выдается КИМ с тестовыми заданиями, если тестовое задание проводится в дистанционной форме, то КИМ размещаются в системе «Электронный университет». КИМ тестового задания содержат три задания. На написание тестового задания отводится 15 минут. Тестовое задание оценивается в формате «зачтено» и «не зачтено». Для получения «зачтено» в тестовом задании нужно верно ответить на два задания. «Не зачтено» выставляется в том случае, если ответ обучающегося не удовлетворяет критериям ответа на «зачтено».

В ходе контрольной работы обучающемуся выдается КИМ с практическими заданиями, если контрольная проводится в дистанционной форме, то КИМ размещаются в системе «Электронный университет». КИМ контрольной содержат два задания. На написание контрольной работы отводится 90 минут. Контрольная работа оценивается в формате «зачтено» и «не зачтено». Для получения «зачтено» в контрольной работе нужно верно выполнить одно задание. «Не зачтено» выставляется в том случае, если ответ обучающегося не удовлетворяет критериям ответа на «зачтено».

**20.2. Промежуточная аттестация**

**Перечень вопросов к экзамену**

1. Формулы Грина. Фундаментальное решение.
2. Постановка краевых задач и задачи Коши. Принцип максимума в ограниченной области.
3. Априорные оценки решений краевых задач. Теоремы единственности.
4. Аналитичность решений по пространственной переменной.
5. Теоремы об устранимой особенности.
6. Построение решения задачи Коши при помощи преобразования Фурье.
7. Гипоэллиптичность оператора теплопроводности.
8. Представление решений с помощью потенциалов. Бесконечная дифференцируемость решений.
9. Принцип максимума в неограниченной области. Строгий принцип максимума.
10. Оценки решений неоднородных уравнений.
11. Априорные оценки решений задачи Коши. Теорема единственности для задачи Коши. Стабилизация решений.
12. Оценки производных решений уравнения теплопроводности.
13. Теорема Лиувилля.
14. Компактность семейства решений.

15. Гладкость объемных потенциалов. Обобщенное решение для уравнения теплопроводности.

Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины «Начально-краевые задачи для параболических уравнений» в форме экзамена.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестра и может завершать изучение как отдельной дисциплины, так и ее разделов. Промежуточная аттестация помогает оценить более крупные совокупности знаний и умений, в некоторых случаях даже формирование определенных профессиональных компетенций.

На экзамене оценивается уровень освоении учебной дисциплины и степень сформированности компетенций оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» и «неудовлетворительно».

В ходе экзамена обучающемуся выдается КИМ с практическими заданиями, если экзамен проводится в дистанционной форме, то КИМ размещаются в системе «Электронный университет». КИМ экзамена содержат три вопроса. На написание экзамена отводится 150 минут. «Отлично» выставляется при правильном ответе на три вопроса КИМ, «хорошо» выставляется при правильном ответе на два вопроса КИМ, «удовлетворительно» выставляется при правильном ответе на один вопрос КИМ, «неудовлетворительно» выставляется если обучающийся неверно ответил на все вопросы КИМ.

**20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ**

**Перечень заданий для оценки сформированности компетенции**

**Задания закрытого типа с выбором ответа**(выбор одного варианта ответа, верно/неверно) **Test1-5:**

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

Test 1. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, $T$ – оператор теплопроводности. Оператор теплопроводности действует на функцию $u(x,t)$ следующим образом:

1) $Tu(x,t) = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$, 2) $Tu(x,t) = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$, 3) $Tu(x,t) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$.

Ответ: 1

Test 2. Пусть $\omega_\tau = \{(x,t) \,|\, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < t \le \tau\}$, $u(x,t) \in C^{2,1}(\omega_\tau) \cap C^0(\bar{\omega}_\tau)$, в $\omega_\tau$

$$Tu(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = 0,$$

и в точке $(x^0,t^0) \in \omega_\tau$ функция $u(x,t)$ достигает наибольшее или наименьшее значение. Будет ли при $(x,t) \in \omega_{t^0}$ выполнено равенство $u(x,t) = u(x^0,t^0)$?

1) да. 2) нет.

Ответ: 2

Test 3. Пусть $\omega$ ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, лежащая в слое $(x,t)\big|\ t'<t<t''$ , функция $u(x,t)\in C^{2,1}(\omega)$ и является в $\omega$ решением уравнения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}=0\,.$$

Будет ли функция $u(x,t)$ аналитической по пространственной переменной $x$?

а) да. б) нет.

Ответ 1

Test 4.. Пусть $\omega_\tau = (x,t)\big|x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n, 0<t\le\tau$ , $S_\tau=\partial\Omega\times(0;\tau)$, $u(x,t)\in C^{2,1}(\bar\omega_\tau)$, $\nu$ – единичный вектор внешней нормали к $S_\tau$, $Tu(x,t)=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$, $T^*u(x,t)=-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$.

Первой формулой Грина для оператора теплопроводности называется формула

1) $$\int_{\omega_\tau} v(x,t)Tu(x,t)\,dxdt=\int_{\omega_\tau}(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i}-u(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t})\,dxdt-\int_{S_\tau}v(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu}\,ds+$$
$$+\int_{\Omega}u(x,\tau)\,v(x,\tau)\,dx-\int_{\Omega}u(x,0)\,v(x,0)\,dx,$$

2) $$-\int_{\omega_\tau}u(x,t)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_i^2}\,dxdt=\int_{\omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i}\,dxdt-\int_{S_\tau}u(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial \nu}\,ds\,,$$

3) $$\int_{\omega_\tau}(v(x,t)Tu(x,t)-u(x,t)T^*v(x,t))\,dxdt=\int_{S_\tau}(u(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial \nu}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu}v(x,t))\,ds+$$
$$+\int_{\Omega}u(x,\tau)\,v(x,\tau)\,dx-\int_{\Omega}u(x,0)\,v(x,0)\,dx.$$

Ответ: 1

Test 5.. Введем обозначения: $\omega$ ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, лежащая в слое $(x,t)\big|\ t'<t<t''$ , $S$ граничные точки области $\omega$, лежащие в слое $(x,t)\big|\ t'<t<t''$ , $\Omega'=\bar\omega\cap\ (x,t)\big|\ t=t'$ , $\Omega''$ множество точек из $\bar\omega\cap\ (x,t)\big|\ t=t''$ которые являются внутренними точками этого множества в гиперплоскости $t=t''$, $\sigma=\bar S\cup\Omega'$, $\tilde\omega=\omega\cup\Omega''$. Если $u(x,t)\in C^{2,1}(\tilde\omega)\cap C^{0}(\bar\omega)$ и в $\tilde\omega$

$$Tu(x,t)=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}=f(x,t)$$

будет ли при $(x,t)\in\bar\omega$ выполнена оценка

$$\min_{(x,t)\in\sigma}u(x,t)-\tau\sup_{(x,t)\in\omega}\left|f(x,t)\right|\le u(x,t)\le\max_{(x,t)\in\sigma}u(x,t)+\tau\sup_{(x,t)\in\omega}\left|f(x,t)\right|?$$

1) да. 2) нет.

Ответ: 1

Задания открытого типа (короткий текст): **!Test6-10**

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

**Вставьте пропущенное слово или закончите определение**

!Test 6. Пусть $G^0 = \{(x,t) | x \in \mathbb{R}^n, t \le t^0\}$, функция $u(x,t) \in C^{2,1}(G^0)$ в $G^0$ является решением уравнения

$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = 0$ и существует такая …….. $C_1 > 0$, что в $G^0$ выполнена оценка

$$|u(x,t)| \le C_1(1 + |x|^2 + |t|)^{q/2}.$$

Ответ: константа, постоянная

!Test 7.. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $Tu(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$.

Фундаментальным решением для уравнения ……. называется функция $\Gamma(x, x^0, t, t^0) \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$ .

Ответ: теплопроводности

!Test 8. Пусть $\omega_\tau = \{(x,t) | x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < t \le \tau\}$, $S_\tau = \partial\Omega \times (0;\tau)$, $u(x,t) \in C^{2,1}(\bar{\omega}_\tau)$ является решением следующей задачи

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = f(x,t),\ (x,t) \in \omega_\tau,$$
$$u(x,t) = 0, (x,t) \in S_\tau.$$

Будет ли выполнена …

$$\int_{\omega_{t^0}} (\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i})^2 + u(x,t))\,dxdt + \int_{\Omega} u^2(x,t^0)\ dx \le$$
$$\le K(\tau)[\int_{\Omega} u^2(x,0)\ dx + \int_{\omega_{t^0}} f^2(x,t)\,dxdt]?$$

Ответ: оценка, неравенство

!Test 9. Введем обозначение $\omega_\tau = \{(x,t) | x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < t \le \tau\}$. Пусть $(x^0, t^0) \in \omega_\tau$, функция $u(x,t)$ в $\omega_\tau \setminus (x^0, t^0)$ является решением уравнения $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = 0$. Если $u(x,t) \in C^{2,1}(\bar{\omega}_\tau \setminus (x^0, t^0))$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\omega_\tau \setminus (x^0, t^0)$ такое, что

$$\int_{|x-x_0<\rho|} |u(x,t)|\,dx < \varepsilon,$$

тогда в точке $(x^0, t^0)$ функция $u(x,t)$ имеет …. особенность

Ответ: устранимую

!Test 10. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $\Gamma(x, x^0, t, t^0)$ – … решение уравнения теплопроводности, тогда функция $\Gamma(x, x^0, t, t^0)$ выглядит следующим образом:

$$\Gamma(x, x^0, t, t^0) = \frac{\theta(t - t^0)}{(2\sqrt{\pi(t - t^0)})^n} \exp[-\frac{\left|x - x^0\right|^2}{4(t - t^0)}].$$

.

Ответ: фундаментальное

!Test 1. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, $T$ – оператор теплопроводности. Оператор теплопроводности действует на функцию $u(x,t)$ следующим образом:

1) $Tu(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$, 2) $Tu(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$,

3) $Tu(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$.

Ответ: 1

!Test 2. Пусть $\omega_\tau = (x,t) \big| x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < t \le \tau$, $u(x,t) \in C^{2,1}(\omega_\tau) \cap C^0(\bar{\omega}_\tau)$, в $\omega_\tau$

$$Tu(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = 0,$$

и в точке $(x^0, t^0) \in \omega_\tau$ функция $u(x,t)$ достигает наибольшее или наименьшее значение. Будет ли при $(x,t) \in \omega_{t^0}$ выполнено равенство $u(x,t) = u(x^0, t^0)$?

1) да. 2) нет.

Ответ: 2

!Test 3. Пусть $\omega$ ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, лежащая в слое $(x,t) \big| \, t' < t < t''$, функция $u(x,t) \in C^{2,1}(\omega)$ и является в $\omega$ решением уравнения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = 0.$$

Будет ли функция $u(x,t)$ аналитической по пространственной переменной $x$?

1) да. 2) нет.

Ответ 1

!Test 4. Пусть $\omega_\tau = \{(x,t) | x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < t \le \tau\}$, $S_\tau = \partial\Omega \times (0;\tau)$, $u(x,t) \in C^{2,1}(\bar{\omega}_\tau)$, $\nu$ – единичный вектор внешней нормали к $S_\tau$, $Tu(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$, $T^* u(x,t) = -\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$. Первой формулой Грина для оператора теплопроводности называется формула

1) $$\int_{\omega_\tau} v(x,t) Tu(x,t)\, dxdt = \int_{\omega_\tau} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} - u(x,t) \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\Big)\, dxdt - \int_{S_\tau} v(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu}\, ds + \\ + \int_{\Omega} u(x,\tau)\, v(x,\tau)\, dx - \int_{\Omega} u(x,0)\, v(x,0)\, dx,$$

2) $$-\int_{\omega_\tau} u(x,t) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_i^2}\, dxdt = \int_{\omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i}\, dxdt - \int_{S_\tau} u(x,t) \frac{\partial v(x,t)}{\partial \nu}\, ds,$$

3) $$\int_{\omega_\tau} \big(v(x,t) Tu(x,t) - u(x,t) T^* v(x,t)\big)\, dxdt = \int_{S_\tau} \Big(u(x,t) \frac{\partial v(x,t)}{\partial \nu} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} v(x,t)\Big)\, ds + \\ + \int_{\Omega} u(x,\tau)\, v(x,\tau)\, dx - \int_{\Omega} u(x,0)\, v(x,0)\, dx.$$

Ответ: 1

!Test 5. Введем обозначения: $\omega$ ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, лежащая в слое $\{(x,t) | t' < t < t''\}$, $S$ граничные точки области $\omega$, лежащие в слое $\{(x,t) | t' < t < t''\}$, $\Omega' = \bar{\omega} \cap \{(x,t) | t = t'\}$, $\Omega''$ множество точек из $\bar{\omega} \cap \{(x,t) | t = t''\}$ которые являются внутренними точками этого множества в гиперплоскости $t = t''$, $\sigma = \bar{S} \cup \Omega'$, $\tilde{\omega} = \omega \cup \Omega''$. Если $u(x,t) \in C^{2,1}(\tilde{\omega}) \cap C^0(\bar{\omega})$ и в $\tilde{\omega}$

$$Tu(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = f(x,t)$$

будет ли при $(x,t) \in \bar{\omega}$ выполнена оценка

$$\min_{(x,t)\in\sigma} u(x,t) - \tau \sup_{(x,t)\in\omega} |f(x,t)| \le u(x,t) \le \max_{(x,t)\in\sigma} u(x,t) + \tau \sup_{(x,t)\in\omega} |f(x,t)| ?$$

1) да. 2) нет.

Ответ: 1

!Test 6. Пусть $G^0 = \{(x,t) | x \in \mathbb{R}^n, t \le t^0\}$, функция $u(x,t) \in C^{2,1}(G^0)$ в $G^0$ является решением уравнения $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = 0$ и существуют такие константы $C_1 > 0$ и $q \ge 0$, что в $G^0$ выполнена оценка

$$\left|u(x,t)\right| \le C_1(1+\left|x\right|^2+\left|t\right|)^{q/2},$$

тогда в $G^0$ функция $u(x,t)$ будет

1) не зависеть от $x$, 2) не зависеть от $t$, 3) многочленом относительно $x$ и $t$.

Ответ: 3

**3++**

!Test 7. Пусть $\omega_\tau = \{(x,t) | x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < t \le \tau\}$, $S_\tau = \partial\Omega \times (0;\tau)$, $u(x,t) \in C^{2,1}(\bar{\omega}_\tau)$, $\nu$ – единичный вектор внешней нормали к $S_\tau$, $Tu(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$, $T^* u(x,t) = -\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$. Второй формулой Грина для оператора теплопроводности называется формула

1) $$\int_{\omega_\tau} v(x,t) Tu(x,t)\, dxdt = \int_{\omega_\tau} (\sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} - u(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t})\, dxdt - \int_{S_\tau} v(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} ds + \int_\Omega u(x,\tau)\, v(x,\tau)\, dx - \int_\Omega u(x,0)\, v(x,0)\, dx,$$

2) $$-\int_{\omega_\tau} u(x,t) \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_i^2} dxdt = \int_{\omega_\tau} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} dxdt - \int_{S_\tau} u(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial \nu} ds,$$

3) $$\int_{\omega_\tau} (v(x,t) Tu(x,t) - u(x,t) T^* v(x,t))\, dxdt = \int_{S_\tau} (u(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial \nu} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} v(x,t))\, ds + \int_\Omega u(x,\tau)\, v(x,\tau)\, dx - \int_\Omega u(x,0)\, v(x,0)\, dx.$$

Ответ: 3

!Test 8. Пусть $G_\tau = \{(x,t) | x \in \mathbb{R}^n, 0 < t \le \tau\}$, $u(x,t) \in C^{2,1}(G_\tau) \cap C^0(\bar{G}_\tau)$, существует константа $M$ такая, что при $(x,t) \in G_\tau$ выполнена оценка $|u(x,t)| \le M$ и в $G_\tau$

$$Tu(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = f(x,t).$$

Будет ли при $(x,t) \in G_\tau$ выполнена оценка

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,0) - \tau \sup_{(x,t)\in G_\tau} |f(x,t)| \le u(x,t) \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,0) + \tau \sup_{(x,t)\in G_\tau} |f(x,t)| ?$$

1) да. 2) нет.

Ответ: 1

Задания открытого типа (короткий текст): **!Test9-15**

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

**Вставьте пропущенное слово или закончите определение**

!Test 9. Пусть $G^0 = \{(x,t) | x \in \mathbb{R}^n, t \le t^0\}$, функция $u(x,t) \in C^{2,1}(G^0)$ в $G^0$ является решением уравнения

$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = 0$ и существует такая ……. $C_1 > 0$, что в $G^0$ выполнена оценка

$$|u(x,t)| \le C_1 (1 + |x|^2 + |t|)^{q/2}.$$

Ответ: константа, постоянная

!Test 10. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $Tu(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$.

Фундаментальным решением для уравнения ……. называется функция $\Gamma(x, x^0, t, t^0) \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$ .

Ответ: теплопроводности

!Test 11. Пусть $\omega_\tau = (x,t)\big| x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < t \le \tau$ , $S_\tau = \partial\Omega \times (0;\tau)$, $u(x,t) \in C^{2,1}(\bar{\omega}_\tau)$ является решением следующей задачи

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = f(x,t),\ (x,t) \in \omega_\tau,$$
$$u(x,t) = 0, (x,t) \in S_\tau.$$

Будет ли выполнена …

$$\int_{\omega_{t^0}} (\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i})^2 + u(x,t))\, dxdt + \int_{\Omega} u^2(x,t^0)\ dx \le$$
$$\le K(\tau)[\int_{\Omega} u^2(x,0)\ dx + \int_{\omega_{t^0}} f^2(x,t)\, dxdt]?$$

Ответ: оценка,
неравенство

!Test 12. Введем обозначение $\omega_\tau = (x,t)\big| x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < t \le \tau$ . Пусть $(x^0,t^0) \in \omega_\tau$, функция $u(x,t)$ в $\omega_\tau \setminus (x^0,t^0)$ является решением уравнения $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = 0$. Если $u(x,t) \in C^{2,1}(\bar{\omega}_\tau \setminus (x^0,t^0))$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\omega_\tau \setminus (x^0,t^0)$ такое, что

$$\int_{|x-x_0<\rho|} \big|u(x,t)\big|\, dx < \varepsilon ,$$

тогда в точке $(x^0,t^0)$ функция $u(x,t)$ имеет …. особенность

Ответ: устранимую

!Test 13. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $\Gamma(x, x^0, t, t^0)$ – … решение уравнения теплопроводности, тогда функция $\Gamma(x, x^0, t, t^0)$ выглядит следующим образом:

$$\Gamma(x, x^0, t, t^0) = \frac{\theta(t-t^0)}{(2\sqrt{\pi(t-t^0)})^n} \exp[-\frac{\left|x-x^0\right|^2}{4(t-t^0)}].$$

.

Ответ: фундаментальное

!Test 14. Пусть $\omega_{\tau} = (x,t)\big| x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < t \le \tau$ , $S_{\tau} = \partial\Omega \times (0;\tau)$, $\nu$ – единичный вектор внешней ……. к $S_{\tau}$, $u(x,t) \in C^{2,1}(\bar{\omega}_{\tau})$ удовлетворяет следующей задаче:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = f(x,t),\ (x,t) \in \omega_{\tau},$$
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = 0, (x,t) \in S_{\tau}.$$

Ответ: нормали

!Test 15. Введем обозначения: $\omega$ … область в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, лежащая в слое $(x,t)\big| \, t' < t < t''$ , $S$ граничные точки области $\omega$, лежащие в слое $(x,t)\big| \, t' < t < t''$ , $\Omega' = \bar{\omega} \cap (x,t)\big| \, t = t'$ , $\Omega''$ множество точек из $\bar{\omega} \cap (x,t)\big| \, t = t''$ которые являются внутренними точками этого множества в гиперплоскости $t = t''$, $\sigma = \bar{S} \cup \Omega'$, $\tilde{\omega} = \omega \cup \Omega''$.

Ответ: ограниченная

**Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (зна**